Olimpiada Chilena de Física
Prueba Nacional

Fecha: Viernes 20 de Noviembre 2020.
Entrega antes de las 23:59 de 20 Noviembre 2020.

.

Instrucciones:

1. Solo se puede subir un achivo PDF al sistema. De esta forma no intente subir fotos sin componerlas en un único archivo.
2. Evidentemente este es trabajo individual. En este caso tenemos que confiar en su honestidad.
3. Los problemas son casi exclusivamente de razonamiento físico y la mayor parte de la información es **autocontenida**.
4. No entregue hojas en blanco como parte del archivo PDF.
5. Ponga nombre y RUN a **todas** las hojas que entregue (incluído el enunciado). Esto es por si se produce un desorden inesperado a la hora de fotografiar o escannear.
6. Enumere **todas** las hojas que entregue. La enumeración debe ser de la forma (p, N) o p/N, donde p es el número de la hoja y N el número total de hojas entregado.

Nombre y RUN:

P1	
P2	
P3	
Nota:	

Problema # 1: Choques elásticos

Tres objetos, puede pensar que son puntuales, de masas m_1, m_2 y m_3 respectivamente se ubican sobre una superficie sin roce. Considere que los tres objetos están alineados durante todo el desarrollo de los problemas. m_1 viaja con velocidad constante en la dirección que une las tres masas hasta impactar a m_2. Suponga que m_2 y m_3 están en reposo, y considere choques perfectamente elásticos. Le puede ser conveniente definir un sistema de coordenadas sobre el plano con uno de los ejes coincidiendo con la línea que une a las tres masas.

Luego del primer choque entre m_1 y m_2 determine

1. Las velocidades de m_1 y m_2.

2. Las condiciones para que m_1 rebote.

3. Las condiciones para que m_1 continúe en el mismo sentido en que impactó a m_2.

4. Las condiciones para que m_1 quede en reposo.

Responda, argumentando, si es posible que m_2 impacte a m_3 y bajo qué condiciones. Si es así, determine después de este segundo choque de m_2

1. la velocidad de m_3,

2. la velocidad de m_2,

3. las condiciones para que los tres bloques terminen moviéndose en el mismo sentido que tenía m_1 antes del primer impacto, y

4. las condiciones para que m_1 finalmente termine viajando en sentido inverso al que tenía antes del primer impacto. Recuerde que esto puede ocurrir producto del primer impacto, o de un segundo impacto con m_2, luego que m_2 haya impactado a m_3 y rebotado.

Problema # 2: Choques elásticos relativistas

Los choques en teoría de partículas, usando la terminología de la mécania clásica, son siempre elásticos, es decir conservan energía además de momentum. Esto es debido a que las pérdidas de energía, como por el roce, son efectos macróscopicos. Usando esto vamos analizar el choque de un electrón con un fotón. Para eso vamos a necesitar definir algunos elementos relativistas, que separan la cinemática relativista de la que pueden conocer. Como una medida de precaución es bueno comentar que vamos a usar la notación contemporánea de vectores, donde $\vec{A}$ ha sido reemplazado por $\mathbf{A}$.

El momentum de un electrón de masa m está dado por

$$\mathbf{p} = m\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{c^2}}} \tag{1}$$

y su energía

$$E = m\frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{c^2}}}$$

con m la masa del electrón y $\mathbf{v}$ la velocidad del electrón en algún sistema de referencia. c la *velocidad* de la luz. Note que la norma del vector $\mathbf{v}$ debe satisfacer $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2 < c^2$. Se puede notar también que se satisface $E^2/c^2 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = m^2c^2$.

Note, además, que en el sistema de referencia del electrón, que se llama propio, donde este evidentemente está en reposo (**no se puede mover con respecto a si mismo, obvio, ¿no?**), se satisface $\mathbf{p}_{propio} = 0$ y $E_{propio} = mc^2$ [1].

Para un fotón lo anterior es muy distinto. El momentum está dado por

$$\mathbf{p}_{\text{fotón}} = \mathbf{k} = \hbar\frac{\omega}{c}\mathbf{n} \tag{2}$$

con ω la frecuencia angular del fotón y $\hbar = (2\pi)^{-1}h$, con h la constante de Plank. $\mathbf{n}$ un vector unitario, es decir $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$. La energía está dada por

$$E_{\text{fotón}} = k^0 = \hbar\omega = \frac{h}{\lambda}$$

Acá λ es lo longitud de onda del fotón y está relacionada con $\omega = 2\pi c/\lambda$. Evidentemente $(k^0)^2/c^2 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 0$.

*Como se puede ver c solo molesta para los cálculos así que los físicos acostumbran fijar $c = 1$, y de ahora en adelante lo puede considerar así. Esto **no** es solo una simplificación, de hecho se conoce como unidades naturales.* Usando esto,

$$E = \frac{m}{\sqrt{1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}} \qquad \mathbf{p} = m\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}}$$

$$k^0 = \hbar\omega \qquad \mathbf{k} = \hbar\omega\mathbf{n}$$

sujeto a que $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} < 1$.

Condiciones del choque

Ahora podemos proponer las condiciones para el choque. Vamos a suponer un electrón en reposo que es impactado por un fotón de frecuencia ω conocida. De esta forma, las condiciones son las siguientes

Antes del choque	para el electrón $\mathbf{v} = 0$ para el fotón supondremos que ω y $\mathbf{n}$ son conocidos
Después del choque	para el electrón la velocidad, $\mathbf{v}'$, es desconocida para el fotón ω' y $\mathbf{n}'$ son desconocidos

Le puede ser muy conveniente definir un sistema de coordenadas en el cual uno de sus ejes, digamos el eje x, coincide con la direccón y sentido del movimiento original de fotón.

Preguntas del movimiento en una dimensión

Vamos a suponer, para partir, que todo ocurre a lo largo de una línea. Es decir, después del impacto entre el fotón y el electrón estos se mueven en la misma dirección, no necesariamente el mismo sentido, en la cual incidió el fotón. Ahora,

1. determine la velocidad de salida del electrón, y
2. determine la frecuencia de salida del fotón.
3. ¿Es posible que el fotón atraviese al electrón? Comente.

[1] Esta es la famosa expresión, pero como se pueden dar cuenta es solo un caso partícular de la versión completa

Preguntas del movimiento en dos dimensiones

Resolver el problema en dos dimensiones entrega algunos resultados muy interesantes. Acá las condiciones son las mismas que en el problema unidimensional, pero obviamente hay que suponer algunas cosas para poder hacer el álgebra. Si usa el sistema de coordenadas de la parte anterior, antes del choque $\mathbf{n} = (1, 0)$ y despues del choque $\mathbf{n}' = (\cos(\theta'), \sin(\theta'))$, donde θ' es el ángulo de desviación del fotón luego de impactar. Se puede definir también el ángulo de la salida del electrón luego del impacto, digamos Θ', pero no es necesario para este problema.

Usando lo anterior, encuentre una expresión que correlacione λ (la longitud de onda del fotón antes del choque) y λ' (la longitud de onda del fotón después del choque) con el ángulo de salida del electrón después del impacto θ'. Esta expresión no debe depender la información de salida del electrón luego del choque (es decir, no puede depender de Θ' ó de $\mathbf{v}'$ como un todo).

Problema # 3: Niveles de energía del átomo de hidrógeno

Unos de los problemas fundamentales con los que se encontraron los físicos a principios del siglo XX fue la aparición de resultados experimentales que no tenían lugar en las teorías clásicas. Por ejemplo, se descrubrió que la luz existía como pequeños paquetes, digamos partículas, como se vió en el problema anterior, dando origen al descubrimiento del fotón. Sin embargo, un resultado que causó aún sorpresa fue que los átomos solo emiten y absorben fotones de cierta frecuencia. Modelar esto fue lo que realmente inició la mecánica cuántica como tal. Para el átomo de hidrógeno las longitudes de onda de estos fotones podían tomar solo los valores

$$\frac{1}{\lambda_{mn}} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{3}$$

con $n > m = 1, 2, 3, \ldots$ y $R = 1{,}09677583 \times 10^7 [m^{-1}]$ es una constante. La idea es recuperar de primeros principios estas relaciones.

El modelo que vamos a usar es el de un electrón, de masa m_e y carga $-e$, orbitando un núcleo atómico de masa $m_p \gg m_e$ y carga eléctrica e. La condición $m_p \gg m_e$ es simplemente para poder eliminar el *movimiento* del núcleo del problema dinámico. De esta forma, el electrón orbita en torno al núcleo siguiendo la ecuación de Newton,

$$m_e \mathbf{a} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r},$$

con $\mathbf{a}$ la aceleración y $\mathbf{r}$ el vector posición en un sistema de coordenadas donde el núcleo está en el centro. El radio de la órbita es $r = |\mathbf{r}|$ con $||$ la norma del vector. ϵ_0 es la constante de permitividad del vacío. La energía del electrón está dada por

$$E = \frac{1}{2} m_e \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

Obviamente hasta ahora no hemos propuesto nada cuántico. Esto ocurre bajo dos supuestos

- Las órbitas son exclusivamente circulares, es decir con radio constante.
- La suma del momentum angular $\mathbf{L}$ a lo largo de un ciclo de rotatión solo puede tomar valores discretos. Esto se conoce como cuantización de Sommerfeld, y está dada por

  $$2\pi|\mathbf{L}| = 2\pi m|\mathbf{v}|r = 2\pi n\hbar \tag{4}$$

  con $n \in \mathbb{N}$, los números naturales.

Usando lo anterior,

1. demuestre que la energía solo puede tomar valores discretos dados por

   $$E_n = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^4 m_e}{n^2\hbar^2}, \tag{5}$$

   con $n \in \mathbb{N}$. Recuerde que $\hbar = h/(2\pi)$ con h la constante de Planck.
2. Comente la razón de por qué $E_n < 0$ y qué significado tiene

   $$\lim_{n\to\infty} E_n \to 0.$$

3. Argumente cómo esto reproduce la ecuación (3) y haga una predicción para el valor R en términos de las constantes del problema.