Olimpiada Chilena de Física
Prueba Teórica

Fecha: Jueves 05 Noviembre 2015.
Duración: 2 horas 20 minutos.
.

Instrucciones:

1. Trabajo individual.
2. Sin apuntes ni artefactos electrónicos. Apague sus teléfonos celulares
3. No entregue hojas en blanco.
4. Ponga nombre a **todas** las hojas que entregue (incluído el enunciado).
5. Enumere **todas** las hojas que entregue. La enumeración debe ser de la forma (p, N) o p/N, donde p es el número de la hoja y N el número total de hojas entregado.
6. No doble sus hojas.
7. Tache o borre sus resultados incorrectos. No se evaluarán problemas que tengan dos (o más) soluciones.

Nombre:

P1	
P2	
P3	
Nota:	

Problema # 1

Teoría

Van a determinar la versión más simple de las transformaciones de Lorentz usando las mismas ideas que usó A. Einstein en su trabajo de 1905.

1. **La velocidad de luz, que es el nombre que se le da a la rapidez de está, es la misma en todo sistema inercial.**

2. **Todos los sistemas inerciales son equivalentes y existe una transformación homogénea que permite cambiarse de uno a otro, y que sólo depende de la velocidad relativa entre ambos.**

   Esto es más matemático de implementar. Por simplicidad lo van a hacer en solo una dimensión espacial. Vamos a suponer que existe un sistema inercial S unidimensional donde la distancia es medida por la coordenada espacial x y cuyo tiempo es medido por el tiempo t. Existe un segundo sistema inercial S' moviéndose con velocidad v, a lo largo de mismo eje x, con respecto a S. En S', las distancias son medidas con la coordenada x' y tiempo con t'.

   Por simplicidad vamos a ajustar los relojes y coordenadas entre S y S', de forma que $x' = 0$ y $t' = 0$ coincida con $t = 0$ y $x = 0$. Una transformación homogénea entre las coordenadas (t, x) y (t', x') está definida por

$$\begin{aligned} t &= \alpha(v)t' + \beta(v)x' \\ x &= \gamma(v)t' + \delta(v)x', \end{aligned}$$

   donde $\alpha(v), \beta(v), \gamma(v)$ y $\delta(v)$ son funciones solo de la velocidad a determinar. Es directo confirmar que la transformación está hecha de forma que $x' = 0$ y $t' = 0$ coincide con $t = 0$ y $x = 0$. De igual forma, debe existir las transformación inversa que permita pasar de (t, x) a (t', x'). Ésta está dada por

$$\begin{aligned} t' &= \frac{1}{\alpha(v)\delta(v) - \beta(v)\gamma(v)} \left(\delta(v)t - \beta(v)x\right) \\ x' &= \frac{1}{\alpha(v)\delta(v) - \beta(v)\gamma(v)} \left(-\gamma(v)t + \alpha(v)x\right) \end{aligned}$$

Problema

Por simplicidad **vamos a usar un sistemas de unidades donde la velocidad de la luz es $\mathbf{c = 1}$**. Esto se conoce como unidades naturales. En estas unidades la rapidez de los movientos usuales es muy pequeña, por ejemplo 100 km/h es apenas igual a $9{,}3 \times 10^{-8}$.

Para determinar $\alpha(v), \beta(v), \delta(v)$ y $\gamma(v)$ van a seguir los siguientes pasos.

1. Usando que la **velocidad** de la luz debe ser igual para ambos sistemas, S y S', demuestre que

$$\begin{aligned} \delta(v) &= \alpha(v) \\ \gamma(v) &= \beta(v) \end{aligned}$$

   Recuerde que se puede lanzar un rayo de luz a la derecha y a la izquierda y ambos son experimentos distintos. Si el rayo de luz se mueve a la derecha la velocidad de la luz, ésta vez si es la velocidad, medida en ambos sistemas sería unitaria (=1). Por otro lado, si el rayo luz viaja a la izquierda la velocidad de la luz medida sería -1 en ambos sistemas.

2. Usando que la trayectoria del origen de S', es decir el punto $x' = 0$ en el sistema S', describe en el sistema S la línea $x = vt$ pruebe que $\beta(v) = v\alpha(v)$. Con esto la transformación se habrá reducido a

$$\begin{aligned} t &= \alpha(v)(t' + vx') \\ x &= \alpha(v)(x' + vt') \end{aligned}$$

   donde $\alpha(v)$ es todavía una función a determinar de la velocidad.

3. Ahora vamos a usar que por simetría se debe cumplir que $\alpha(v) = \alpha(-v)$, es decir que $\alpha(v)$ debe ser una función par de la velocidad. Usando esto y el hecho que debe ser posible pasarse de

$$(t, x) \to (t', x') \to (t, x)$$

   mediante transformaciones de Lorentz sucesivas con v y luego $-v$ respectivamente, demuestre que

$$\alpha(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

   quedando entonces la transformación de Lorentz

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}(t' + vx') \\ x &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}(x' + vt') \end{aligned}$$

Problema #2

Introducción

Este año se celebran los 100 años de la teoría de la Relatividad General también creada por A.Einstein. Los supuestos de esta son que se satisfacen las reglas de la relatividad especial y además el principio de equivalencia. El principio de equivalencia en su forma más simple establece que la masa inercial, $\mathbf{m_i}$, esa que aparece en la ecuación de Newton $\mathbf{F} = \mathbf{m_i a}$, es equivalente a la masa gravitacional $\mathbf{m_G}$ que aparece en la expresión de la fuerza gravitacional $|\mathbf{F}_G| = GM\mathbf{m_G}r^{-2}$. Es decir $m_i = m_G$.

La primera consecuencia del principio de equivalencia es el hecho que todos los objetos caen con la misma aceleración sobre la superficie de la tierra. Esto ha sido comprobado experimentalmente con gran exactitud en los últimos 100 años.

Sin embargo, lo anterior es la consecuencia más simple de esta igualdad. Mucho más profundo es el que hecho que esa igualdad nos dice que la atracción gravitacional se apaga localmente al simplemente caer. Equivalentemente esta igualdad nos dice que un sistema no inercial tambien se puede analizar como un sistema en presencia de un campo gravitacional. A. Einstein mostraba esto con el famoso ejemplo del acensor sin ventanas.

Si en un ascensor sin ventanas se corta el cable que lo sujeta para un observador en su interior parecerá como si la gravedad desapareciera. En la práctica el observador en el interior está como si estuviera flotando en el espacio vacío. Por el contrario, si este ascensor es puesto realmente en el espacio vacío y empujado con aceleración constante de igual valor que la aceleración de gravedad -en la dirección vertical de éste- para el observador en el interior le es imposible diferenciar eso de estar parado en la superficie de la Tierra.

Problema

Ahora vamos a analizar el movimiento de una boya de volumen V, rellena con aire de densidad ρ_a y anclada dentro de un tanque con agua como se ve en la imagen. Este tanque está encima de un camión. La densidad del agua es ρ_{H_2O}[a].

Si el camión está en la superficie de la Tierra y en reposo con respecto a esta obviamente el cable que sujeta a la boya está en la vertical. Si ahora el camión avanza con aceleración constante a el cable que sujeta a la boya se inclinará.

1. Determine el ángulo de inclinación con respecto a la vertical del cable que sujeta a la boya cuando el camión está con aceleración constante a. ¿ Se inclina en la dirección de la acceleración o en la dirección contraria?

2. Demuestre que para un observador en el interior del tanque pareciera que la boya está sujeta a una fuerza, adicionalmente a la gravedad, en la dirección horizontal cuyo módulo está dado por

$$|\mathbf{F}_h| = aV(\rho_{H_20} - \rho_a)$$

   Para probar lo anterior le puede ser útil recordar el principio de Arquímides. También, si lo necesita, puede suponer que la forma de la boya es un cubo perfecto y recordar que la presión P en un líquido, como el agua, crece linealmente con la profundidad de la forma

$$P(h) = gh\rho_{H_2O}$$

   donde h es la profundidad [b].

[a] $\rho_{H_2O} \approx 1000$ kg/m^3 pero no necesita el número

[b] La profundidad se mide desde la superficie hacia abajo

Problema #3

Introducción

Durante los primeros intentos de clarificar que la naturaleza de la luz existieron dos bandos. Unos creían que eran partículas y los otros creían que es una onda. Esto dió origen a la busqueda de una explicación para fenómenos de la luz basados en cada uno estos los modelos. Los casos de la reflexión y la refracción son los que vamos a discutir ahora.

La reflexión es casi directa si se piensa que son partículas, mal que mal todas las partículas rebotan especularmente. Sin embargo la reflaxión necesitó de modificar una idea de la física hasta esa epoca. Fue Pierre de Fermat quien postuló que la luz recorre la trayectoria que le tome menos tiempo, en contraposión a la más corta. Bajo esta idea van a trabajar.

Problema

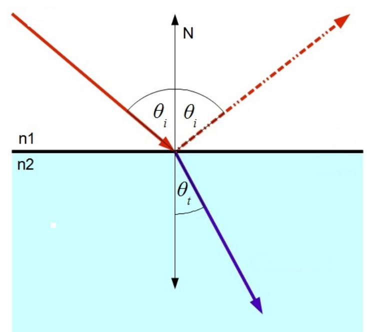
En la figura adjunta se ve un rayo de luz incidir desde un medio a otro. Parte del rayo se refleja, pero la otra parte penetra y se refracta. Demuestre usando que la luz recorre la trajectoria que le toma menos tiempo que

1. el ángulo incidente y reflejado son iguales como se aprecia en la figura.

2. el ángulo incidente y refractado satisfacen la ley de Snell

$$\frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_t)} = \frac{n2}{n1} = \frac{v_1}{v_2},$$

   donde $n1$ y $n2$ son los coeficientes de reflaxión de los dos medios respectivamente. En el primer medio la velocidad de la luz está dada por $v_1 = \frac{c}{n1}$ y en el segundo por $v_2 = \frac{c}{n2}$ siendo c es la velocidad de la luz en el vacío.



Puede necesitar saber que si se tiene la función

$$f(x) = A\sqrt{a^2 + (p-x)^2} + B\sqrt{b^2 + x^2},$$

donde A, B, a, b, p son constantes, su mínimo se puede determinar de la relación algebraica

$$-A\frac{p-x}{\sqrt{a^2 + (p-x)^2}} + B\frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}} = 0$$